

数 学

(解答番号 ～)

I 次の ～ の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。ただし、(5), (7), (9) については、[選択肢]の中から選びなさい。

(1) $(2x - 3y)^3$ を展開すると、

$$\boxed{\text{①}} x^3 - \boxed{\text{②③}} x^2 y + \boxed{\text{④⑤}} xy^2 - \boxed{\text{⑥⑦}} y^3$$

である。

$$(2) \frac{\sqrt{27} - \sqrt{8}}{\sqrt{18} - \sqrt{12}} = \frac{\boxed{\text{⑧}} \sqrt{\boxed{\text{⑨}}} + \boxed{\text{⑩}}}{\boxed{\text{⑪}}}$$

(3) ある店で月曜日から土曜日までの6日間で売れた商品の個数が次のようになった。

月曜日 4 個, 火曜日 2 個, 水曜日 2 個, 木曜日 0 個, 金曜日 1 個, 土曜日 5 個

このデータの平均値は $\frac{\boxed{\text{⑫}}}{\boxed{\text{⑬}}}$ 個, 分散は $\frac{\boxed{\text{⑭⑮}}}{\boxed{\text{⑯}}}$ である。

(4) カードが 100 枚あり, 1 から 100 までの数字が書かれている。最初に 4 の倍数が書かれたカードを取り去り, 次に残ったカードから 6 の倍数が書かれたカードを取り去る。残ったカードは, 枚である。

(5) 実数 x に関する命題「 $x(x - 1) < 2$ ならば $|x - 1| < 1$ 」について考える。

(i) 逆は であり, 裏は であり, 対偶は である。

～ にあてはまるものを次の ㉒ ～ ㉖の中から選び, その番号を答えなさい。

[選択肢]

㉒ $x(x - 1) > 2$ ならば $|x - 1| > 1$

㉓ $x(x - 1) \geq 2$ ならば $|x - 1| \geq 1$

㉔ $|x - 1| < 1$ ならば $x(x - 1) < 2$

㉕ $|x - 1| \geq 1$ ならば $x(x - 1) \geq 2$

㉖ $|x - 1| \geq 1$ ならば $x(x - 1) < 2$

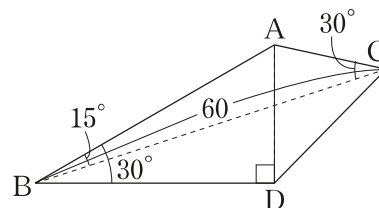
- (ii) もとの命題「 $x(x-1) < 2$ ならば $|x-1| < 1$ 」は であり、逆は であり、裏は であり、対偶は である。

～ にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① 真 ② 偽

- (6) 四面体 ABCD で $BC = 60$, $\angle ABC = 15^\circ$,
 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$
 である。このとき,
 $AD = \sqrt{\text{26 27}}$ である。



- (7) x に関する 2 次不等式 $2x^2 - kx + \frac{k^2}{2} - 3 > 0$ がすべての実数 x で成立しているとき、定数 k の値の範囲は である。また、 x に関する 2 次不等式 $2x^2 - kx + \frac{k^2}{2} - 3 < 0$ が解をもつとき、定数 k の値の範囲は である。

, にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
 ② $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$
 ③ $k < -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < k$
 ④ $k \leq -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} \leq k$
 ⑤ $-\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$

- (8) 2 次関数のグラフが 3 点 $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ を通るとき、2 次関数の式は、

$$y = \sqrt{\text{31 32}} x^2 + \sqrt{\text{33}} x + \frac{\sqrt{\text{34}}}{\sqrt{\text{35}}} \text{ である。}$$

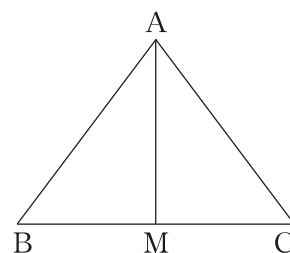
- (9) $a > 0$ とする。3 辺の長さが a , $2a+1$, x となる三角形が描けるとき、 x の範囲を求めると、 である。

にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $a+1 < x < 2a+1$ ② $a+1 \leq x \leq 2a+1$ ③ $2a+1 < x < 3a+1$
 ④ $2a+1 \leq x \leq 3a+1$ ⑤ $a+1 < x < 3a+1$

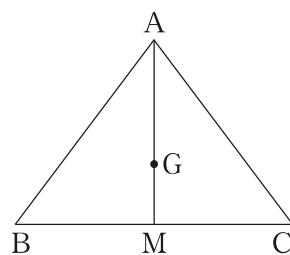
- Ⅱ 図のように、 $AB = AC = 5$ 、 $BC = 6$ の二等辺三角形 ABC において、 BC の中点を M とする。



次の $\boxed{\text{㉔}}$ ～ $\boxed{\text{㉙}}$ の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。

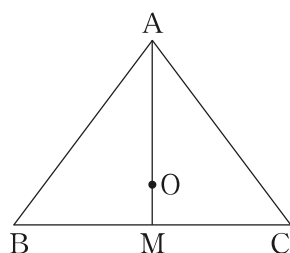
- (1) $AM = \boxed{\text{㉔}}$ である。

$\triangle ABC$ の重心を G とすると、 $AG = \frac{\boxed{\text{㉕}}}{\boxed{\text{㉖}}}$ である。



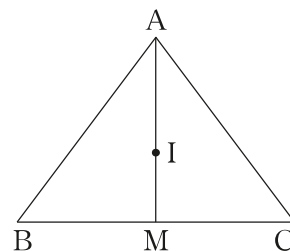
- (2) $\triangle ABC$ の外心を O とし、外接円の半径を R とおくと、
 $OA = OB = R$ 、 $OM = AM - R$

$\triangle OBM$ で三平方の定理を使って、 $R = \frac{\boxed{\text{㉗}} \boxed{\text{㉘}}}{\boxed{\text{㉙}}}$ である。



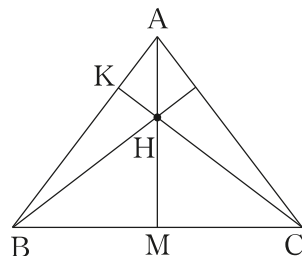
- (3) $\triangle ABC$ の内心を I とし、内接円の半径を r とおくと、

$r = \frac{\boxed{\text{㉚}}}{\boxed{\text{㉛}}}$ である。よって、 $AI = \frac{\boxed{\text{㉜}}}{\boxed{\text{㉝}}}$ である。



- (4) $\triangle ABC$ の垂心を H とし、直線 CH と辺 AB の交点を K とおくと、

$AK = \frac{\boxed{\text{㉞}}}{\boxed{\text{㉟}}}$ であり、 $AH = \frac{\boxed{\text{㊱}}}{\boxed{\text{㊲}}}$ である。



Ⅲ 関数 $f(x) = -2x^2 - 4ax + a - 1$ の $-1 \leq x \leq 3$ の範囲における最大値を $M(a)$ ，最小値を $m(a)$ とする。

次の ～ の中に適切な数字を，[選択肢] の中から選んで入れなさい。

(1) $-1 \leq x \leq 3$ の範囲と $x = -a$ の位置関係を考え， $M(a)$ を求めると，

$$3 \leq -a \text{ すなわち } a \leq -3 \text{ のとき， } M(a) = \text{ }$$

$$-1 < -a < 3 \text{ すなわち } -3 < a < 1 \text{ のとき， } M(a) = \text{ }$$

$$-a \leq -1 \text{ すなわち } a \geq 1 \text{ のとき， } M(a) = \text{ }$$

である。

～ にあてはまるものを次の①～④の中から選び，その番号を答えなさい。

[選択肢]

① $5a - 3$

② $-3a - 3$

③ $-11a - 19$

④ $2a^2 + a - 1$

⑤ $-6a^2 + a - 1$

(2) $x = 1$ と $x = -a$ の位置関係を考え， $m(a)$ を求めると，

$$1 \leq -a \text{ すなわち } a \leq -1 \text{ のとき， } m(a) = \text{ }$$

$$-a < 1 \text{ すなわち } a > -1 \text{ のとき， } m(a) = \text{ }$$

である。

， にあてはまるものを次の①～④の中から選び，その番号を答えなさい。

[選択肢]

① $5a - 3$

② $-3a - 3$

③ $-11a - 19$

④ $2a^2 + a - 1$

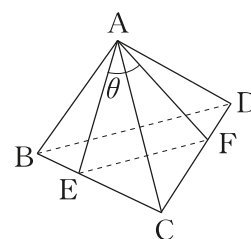
⑤ $-6a^2 + a - 1$

Ⅳ 直美さんと優奈さんは2人で工作のサイコロを作りながら話している。2人の会話を読みながら、次の 56 ～ 61 の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。

直美 : 今度、イベントで大きめのサイコロを使ったゲームを行うけど、楽しみだね。

優奈 : そうだね。それで私たちはそのサイコロを作る係になったんだよね。底面を出目とする四面体のサイコロを作ろうと思うのだけど、普通の正四面体だとつまらないから、いびつな形にしようとしているんだよね。四面体のサイコロの辺の長さの比を、変えてみているんだけど、いろいろ悩むことがあって。

直美 : 四面体はどの面を底面にするかによって、高さは4つ考えられるよね。その4つの高さを比較して、それらの長さに違いがありすぎると、サイコロとしての機能がなくなりそうだから、高さの違いが大きくなりすぎないようにしながら、いびつな形にしようとしているんだよね。



優奈 : いま、サイコロの形の候補として、図のような正四面体 ABCD を A, E, F を通る平面で切り出した四面体 AECF を考えているんだけど、実際にサイコロを作る前にこの四面体の4つの面に対する4つの高さを調べられないかなあ。

直美 : 一緒に計算で求めてみよう。まず仮に、正四面体 ABCD の1辺の長さを3とし、辺 BC を1:2に内分する点を E, 辺 CD を2:1に内分する点を F と設定するよ。それから、四面体 AECF の底面を△AEF としたときの高さを求めてみよう。そのためには、四面体 AECF の体積を2通りの形で表せば求められるよ。

優奈 : へー。どうやって？

直美 : 私のいう順番に求めみてよ。まず、 $\angle EAF = \theta$ として、 θ を調べてみてよ。

(1) △ABE で余弦定理を使うことにより、 $AE = \sqrt{\text{56}}$ である。同様に、 $AF = \sqrt{\text{56}}$ である。

また、△CEF ∽ △CBD で相似比は2:3 だから、 $EF = 2$ である。

△AEF で余弦定理を使うことにより、 $\cos \theta = \frac{\text{57}}{\text{58}}$ である。

優奈 : なぜ、 θ を調べるの？

直美 : それは、△AEF の面積を求めるためだよ。

(2) $\triangle AEF$ の面積を S とすると、 $S = \sqrt{\boxed{59}}$ である。

優奈 : $\triangle AEF$ の面積を求めたよ。次に何を求めるの？

直美 : 次に、四面体 $AECF$ の体積を求めてみてよ。ヒントを出すよ。A から平面 BCD に垂線 AI を下ろすと、 I は $\triangle BCD$ の重心となるから、 CI がわかるよ。そして、直角三角形 AIC で三平方の定理より、 AI を求めることで、四面体 $AECF$ の体積が求められるよ。

(3) 四面体 $AECF$ の体積を V とすると、 $V = \sqrt{\boxed{60}}$ である。

優奈 : 求めたよ。

直美 : いま、四面体 $AECF$ の底面を $\triangle CEF$ 、高さを AI としたけど、今度は、四面体 $AECF$ の底面を $\triangle AEF$ とし、 C から平面 AEF に垂線 CH を下ろし、高さを CH とするんだ。そして、四面体 $AECF$ の体積を考えることで、 CH の長さが求められるよ。これで、四面体 $AECF$ の底面を $\triangle AEF$ としたときの高さがわかるね。

(4) C から平面 AEF に垂線 CH を下ろすと、 $CH = \sqrt{\boxed{61}}$ である。

直美 : CH 、 AI の長さがわかり、他の2つの高さも CH と同様な方法で求められるので、それら4つの高さを比較すれば、サイコロとして使えそうかどうか分かるね。