

数 学

（解答番号 ～ ）

I 次の ～ の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。ただし、(1), (2), (4), (7), (9)については、[選択肢]の中から選びなさい。

(1) 方程式 $|1 - 2x| - 5 = 0$ の解は である。

にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

① $x = -2$

① $x = -3, -2$

② $x = -3, 2$

③ $x = -2, 3$

④ $x = 2, 3$

(2) 不等式 $\frac{x}{4} + \frac{1}{3} < \frac{4-x}{2} \leq \frac{2x-1}{3}$ の解は である。

にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

① $2 \leq x < \frac{20}{9}$

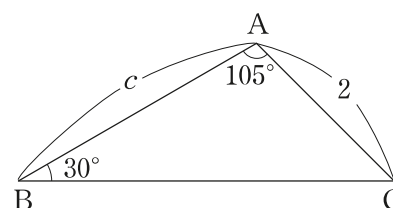
① $2 \leq x < \frac{28}{9}$

② $x \leq 2, \frac{20}{9} < x$

③ $x \leq 2, \frac{28}{9} < x$

④ $x \leq 2$

(3) 右図の△ABCで、 $c = \sqrt{\text{③}}$ である。



- (4) 大きさが 99 の体重のデータがあり、小さい方から 71 番目は 61 kg, 72 番目は 61 kg, 73 番目は 62 kg, 74 番目は 63 kg, 75 番目は 64 kg, 76 番目は 66 kg である。このときの第 3 四分位数を Q_3 とすると、 $Q_3 = \boxed{\text{⑤}}$ (kg) である。

そのデータに 1 つのデータ 59 kg を加えて大きさを 100 としたときの第 3 四分位数を Q'_3 とすると、 $Q'_3 = \boxed{\text{⑥}}$ (kg) である。

$\boxed{\text{⑤}}$, $\boxed{\text{⑥}}$ にあてはまるものを次の ①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① 63 ② 63.5 ③ 64 ④ 64.5 ⑤ 65

- (5) 袋の中に黒玉 1 個, 白玉 2 個が入っている。玉を 1 個取り出し、玉の色を確認し、もとに戻すことを繰り返し、同じ色を続けて取り出した時点で終了するものとする。ただし、玉を 4 回取り出せば、その時点で強制的に終了するものとする。

玉を取り出す回数の期待値は $\frac{\boxed{\text{⑦}}}{\boxed{\text{⑧}}}$ である。

- (6) $y = -x^2 + 4x$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に 1 平行移動し、 x 軸に関して対称移動したグラフの式は、 $y = x^2 - \boxed{\text{⑨}}x - \boxed{\text{⑩}}$ である。

- (7) 連立不等式

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 12 < 0 \\ 6x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$$

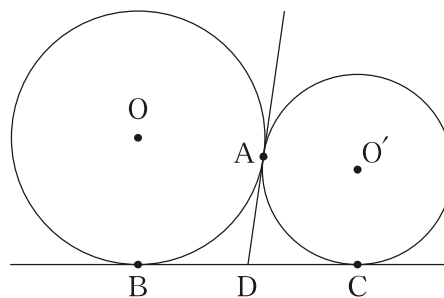
の解は、 $\boxed{\text{⑪}}$ である。

$\boxed{\text{⑪}}$ にあてはまるものを次の ①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{3}$
 ② $-\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$
 ③ $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$
 ④ $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$

- (8) 右の図において円 O , O' の半径はそれぞれ 4, 3 であり, 2つの円は点 A で外接している。また, 直線 BC は円 O , O' にそれぞれ点 B , C で接している。また, 点 A を通る共通接線と線分 BC との交点を D とする。
- このとき, $CD = \boxed{12} \sqrt{\boxed{13}}$ である。



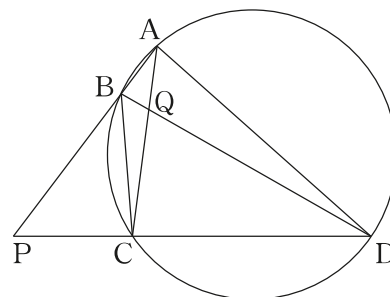
- (9) 実数 x に関する条件「 $x > 0$ かつ $x \neq 1$ 」の否定は $\boxed{14}$ である。

$\boxed{14}$ にあてはまるものを次の①～③の中から選び, その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $x < 0$ かつ $x = 1$
- ② $x \leq 0$ かつ $x = 1$
- ③ $x < 0$ または $x = 1$
- ④ $x \leq 0$ または $x = 1$

Ⅱ 図のように、円に内接する四角形 ABCD において、直線 AB と直線 CD の交点を P、線分 AC と線分 BD の交点を Q とすると、 $AB = 1$, $BP = 3$, $CD = 4$ である。また、 $QA = a$, $QB = b$, $QC = c$, $QD = d$ とおく。



次の ⑮ ～ ⑳ の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。

- (1) 方べきの定理を使うと、 $PC =$ ⑮ $$ と求められる。
- (2) $\triangle APC$ と直線 BD にメネラウスの定理を使うと、 $a : c =$ ⑯ $:$ ⑰ $$ と求められる。
- (3) $\triangle BPD$ と直線 AC にメネラウスの定理を使うと、 $b : d =$ ⑱ $:$ ㉑ $$ と求められる。
- (4) 円の 2 つの弦 AC と BD に関して方べきの定理を使い、(2)(3)の結果をあわせて考えると、
 $a : b : c : d =$ ㉒ $:$ ㉓ $:$ ㉔ $:$ ㉕ $$ と求められる。
- (5) $\triangle PBC$ と $\triangle QAD$ の面積の比は、 $\triangle PBC : \triangle QAD =$ ㉖ $:$ ㉗ $$ である。

Ⅲ ジョーカーを除く 52 枚のトランプがある。マークはハート、ダイヤ、スペード、クラブで、それぞれ数字は 1 から 13 までのカードがある。ただし、数字の 1 のカードには A と書かれ、11, 12, 13 のカードはそれぞれ J, Q, K と書かれている。数字の 1 から 10 までを字札と呼び、数字の 11 (J), 12 (Q), 13 (K) は絵札と呼ぶことにする。

次の $\boxed{26} \sim \boxed{46}$ の中に適切な数字を入れなさい。

(1) カードを 1 枚引くとき、絵札である確率は、 $\frac{\boxed{26}}{\boxed{27} \boxed{28}}$ であり、

ハートである確率は、 $\frac{\boxed{29}}{\boxed{30}}$ であり、

絵札またはハートである確率は、 $\frac{\boxed{31} \boxed{32}}{\boxed{33} \boxed{34}}$ である。

(2) カードを 1 枚引き、もとに戻して、またカードを 1 枚引くとき、少なくともどちらかは

絵札またはハートである確率は、 $\frac{\boxed{35} \boxed{36} \boxed{37}}{\boxed{38} \boxed{39} \boxed{40}}$ である。

(3) カードを 1 枚引き、もとに戻さずに、またカードを 1 枚引くとき、少なくともどちらかは

絵札またはハートである確率は、 $\frac{\boxed{41} \boxed{42} \boxed{43}}{\boxed{44} \boxed{45} \boxed{46}}$ である。

Ⅳ 学校の先生から出された数学の課題に関して、直美さんと優奈さんが話している。2人の会話を読みながら、次の (47) ～ (52) の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。

直美 : 先日、学校の先生から数学の課題を出されて提出したんだけど、不備があると書かれて戻されたんだ。

優奈 : どんなの? 一緒に考えよう。

直美 : ありがとう。「 $\sqrt{12}$ が無理数であることを証明しなさい。」という課題なんだ。背理法で証明しようとしたんだ。

「 $\sqrt{12}$ が無理数でない、すなわち、 $\sqrt{12}$ が有理数」と仮定し、 $\sqrt{12} = \frac{a}{b}$ とおいて、矛盾を導くという方針にしたよ。

優奈 : なるほど。 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ として、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを示すという方針でもよかったと思うけど、 $\sqrt{12}$ が無理数であることを直接示す方針なんだね。

直美 : そうだね。だから証明のスタートは、

「 $\sqrt{12}$ が有理数と仮定すると、 $\sqrt{12} = \frac{a}{b}$ と表される」
だよな。

優奈 : ちょっと待って。この背理法の証明では、まずスタートが大事。

$\sqrt{12} = \frac{a}{b}$ とおいたときに a, b がどんな数なのかをきちんと明記しておくことが必要だよ。

(1) 背理法の証明において、最終的に矛盾を導くところまでを考えると、 $\sqrt{12} = \frac{a}{b}$ とおいたときに a, b を「(47)」と設定しておけばよい。

(47) にあてはまるものを次の①～③の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① a, b は有理数
- ② a, b は自然数
- ③ a, b は自然数で1以外に正の公約数をもたない
- ④ a, b は素数

直美 : そういう条件も大事なんだね。その後の証明を続けるね。

「 $\sqrt{12} = \frac{a}{b}$ だから、

$$12 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$12b^2 = a^2$$

よって、 a^2 は 12 の倍数だから a は 12 の倍数。」

そう書いたところで、不備があると書かれたんだ。

(2) 「 a^2 が 12 の倍数ならば a は 12 の倍数」という命題は偽である。

その反例のうちもっとも小さい自然数 a の値は、 $a = \boxed{48}$ である。

直美 : $12b^2 = a^2$ から a はどんな数の倍数だと言えるのかな？

(3) a^2 が 12 の倍数のとき、 a は $\boxed{49}$ 。ただし、 a は自然数である。

$\boxed{49}$ に入る正しいものを次の選択肢①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① 2 の倍数かつ 3 の倍数である
- ② 3 の倍数かつ 4 の倍数である
- ③ 3 の倍数であるが 2 の倍数でない
- ④ 6 の倍数かつ 4 の倍数である

優奈 : 「 a^2 が 12 の倍数だから a^2 は 3 の倍数。」として続ければよかったね。

そうすれば、「 a^2 が 3 の倍数ならば a は 3 の倍数」の証明をすることで、

その後の証明も続けられるよ。

(4) a を自然数とする。「 a^2 が 3 の倍数ならば a は 3 の倍数」という命題を証明するには、この命題の対偶を証明すればよい。この命題の対偶は $\boxed{50}$ である。

$\boxed{50}$ にあてはまるものを次の選択肢①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① a が 3 の倍数ならば、 a^2 は 3 の倍数
- ② a が 3 の倍数でない、ならば、 a^2 は 3 の倍数
- ③ a が 3 の倍数でない、ならば、 a^2 は 3 の倍数でない
- ④ a^2 が 3 の倍数でない、ならば、 a は 3 の倍数でない
- ⑤ a^2 が 3 の倍数でない、ならば、 a は 3 の倍数

直美 : ありがとう。じゃあ、その後の証明を続けてみるね。

「 $12b^2 = a^2$ より、 a^2 は 3 の倍数だから a は 3 の倍数。

よって、 $a = 3k$ (k は自然数) と表される。

これを $12b^2 = a^2$ に代入すると、

$$12b^2 = (3k)^2$$

$$12b^2 = 9k^2$$

$$4b^2 = 3k^2$$

$4b^2$ は 3 の倍数で 4 と 3 は互いに素だから b^2 は 3 の倍数。

したがって、 b は 3 の倍数。」

(5) b を自然数とする。「 $4b^2$ が 3 の倍数ならば b は 3 の倍数」という命題は真である。以下の

①～③の命題のうち、偽であるものは 1 つある。偽であるものは である。

ただし、①～③の命題において、 b はすべて自然数とする。

にあてはまるものを次の①～③の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

① $2b^2$ が 3 の倍数ならば b は 3 の倍数

② $3b^2$ が 9 の倍数ならば b は 3 の倍数

③ $6b^2$ が 9 の倍数ならば b は 3 の倍数

④ $6b^2$ が 9 の倍数ならば b は 9 の倍数

優奈 : 次はいよいよ背理法の証明の最後の段階で矛盾を示すところだね。

ここまでの証明のどの結果から矛盾が導かれるのかな。

(6) これまでの証明から導かれたいくつかの結果のうち、矛盾を導くために必要な結果は

である。

にあてはまる最も適切なものを次の選択肢①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

① a は 2 の倍数である。

② a は 2 の倍数でありかつ 3 の倍数である。

③ b は 3 の倍数である。

④ a は 2 の倍数であり、 b は 3 の倍数である。

⑤ a は 3 の倍数であり、 b も 3 の倍数である。

直美 : ありがとう。矛盾が導けたので、最初の仮定「 $\sqrt{12}$ が有理数である」が誤っているということだから、 $\sqrt{12}$ は無理数であることが証明できたね。