

数 学

(解答番号 ① ~ ⑦④)

I 次の ① ~ ③① の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。ただし、(8), (9) については、[選択肢]の中から選びなさい。

(1) $x + y - z = 2$, $xy - yz - zx = 1$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2 =$ ① である。

(2) $x + y = 5$, $xy = 3$ のとき,

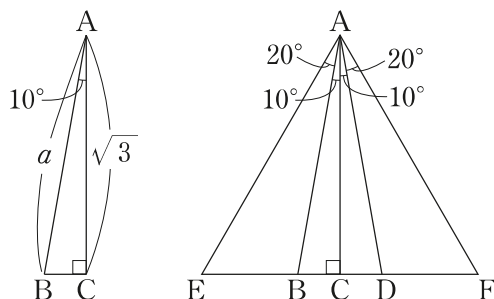
$$x^2 + y^2 = \text{②③},$$

$$x^4 + y^4 = \text{④⑤⑥}$$

である。

(3) 下左図のような $\angle A = 10^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{3}$ の直角三角形 ABC がある。

このとき, $AB = a$ とおき, a が満たす関係式を考える。



(i) 上右図のように補助線を引くと, $AE =$ ⑦ である。

(ii) $EB : BD : DF$ を a を用いて表すと, $EB : BD : DF =$ ⑧ : a : ⑨ である。

(iii) BC を a を用いて表すと, $BC = \frac{a}{a + \text{⑩}}$ である。したがって, 直角三角形 ABC

で三平方の定理を用いると, a が満たす関係式が求められる。

- (4) 座標平面上に2直線 $y = -x - 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ がある。2直線のなす角 θ を求めると、
 $\theta = \boxed{11} \boxed{12}^\circ$ である。ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

- (5) クラスの20人に記憶力問題と間違い探し問題に解答してもらった。記憶力問題の点数のデータを x とし、その平均値を $\bar{x}$ とする。また、間違い探し問題の点数のデータを y とし、その平均値を $\bar{y}$ とする。 $(x - \bar{x})^2$ の和は40、 $(y - \bar{y})^2$ の和は60、 $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ の和は20であった。

このとき、データ x の分散を s_x^2 とすると、 $s_x^2 = \boxed{13}$ である。

データ y の分散を s_y^2 とすると、 $s_y^2 = \boxed{14}$ である。

データ x , y の共分散を s_{xy} とすると、 $s_{xy} = \boxed{15}$ である。

データ x , y の相関係数を r とすると、 $r = \frac{\sqrt{\boxed{16}}}{\boxed{17}}$ である。

- (6) 袋の中に赤玉3個、青玉4個が入っている。1回目に玉を1個取り出し、袋の中に戻さずに、2回目に玉を1個取り出すとする。1回目の玉の色が赤のとき、2回目の玉の色が赤である条件付き確率は、 $\frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である。また、2回目の玉の色が赤のとき、1回目の玉の色が赤であった条件付き確率は、 $\frac{\boxed{20}}{\boxed{21}}$ である。

- (7) $U = \{n | n \text{ は自然数}, 1 \leq n \leq 50\}$ を全体集合とする。また、 $A = \{n | n \text{ は自然数}, 10 < n \leq 30\}$, $B = \{n | n \text{ は自然数}, 15 \leq n < 35\}$ とする。一般に、集合 X において、 $\bar{X}$ は X の補集合を表すものとする。

$\overline{A \cap B}$ の要素の個数は、 $\boxed{22} \boxed{23}$ 個である。

$\overline{A \cup B}$ の要素の個数は、 $\boxed{24} \boxed{25}$ 個である。

$\overline{A \cup B}$ の要素の個数は、 $\boxed{26} \boxed{27}$ 個である。

$\overline{A \cap B}$ の要素の個数は、 $\boxed{28} \boxed{29}$ 個である。

(8) 2次方程式 $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ が異なる正の解を2つもつための定数 k の値の範囲は、

30 である。

30 にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $-2 < k < -1$
- ② $-2 < k$
- ③ $k < -1$
- ④ $k < -2, -1 < k$
- ⑤ $-1 < k$

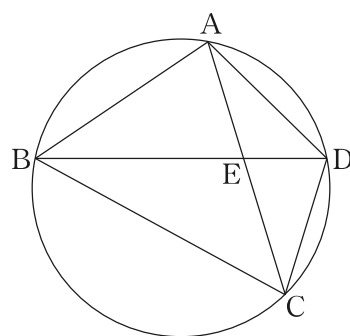
(9) 2次不等式 $x^2 - (k+1)x - 2k + 3 < 0$ の解の範囲に $x = 1$ が含まれ、 $x = 2$ が含まれないとき、定数 k の値の範囲は 31 である。

31 にあてはまるものを次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $k < 1, \frac{5}{4} < k$
- ② $k < 1$
- ③ $\frac{5}{4} < k$
- ④ $1 < k < \frac{5}{4}$
- ⑤ $1 < k \leq \frac{5}{4}$

- Ⅱ 図のように円に内接する四角形 ABCD があり、対角線 AC と BD の交点を E とする。AB = 5, BD = 7, DA = 4 であり、BC : CD = 2 : 1 である。



次の ~ の中に適切な符号あるいは数字を入れなさい。

(1) $\cos \angle BAD = \frac{\text{32} \text{ 33}}{\text{34}}$ である。

このことから、 $\triangle ABD$ の面積は $\triangle ABD = \text{35} \sqrt{\text{36}}$ である。

(2) 円の半径は、 $\frac{\text{37} \text{ 38} \sqrt{\text{39}}}{\text{40} \text{ 41}}$ である。

(3) $CD = \frac{\sqrt{\text{42} \text{ 43} \text{ 44}}}{\text{45}}$ である。

(4) $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の面積をそれぞれ $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ と表す。 $\sin \angle ABC = \sin \angle ADC$, $BE : ED = \triangle ABC : \triangle ADC$ であることから、 $BE = \text{46}$ である。

Ⅲ $x^4 - 72x^2 + 12^2$ を 2 次式の積で表すことを考える。

次の $\boxed{\text{㉔}}$ ～ $\boxed{\text{㉖}}$ の中に適切な数字を、あとの〔選択肢〕の中から選んで入れなさい。
ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

(1) まず、4 次方程式 $x^4 - 72x^2 + 12^2 = 0$ を解くために、 $x^2 = X$ とおくと、

$X^2 - 72X + 12^2 = 0$ となり、 X に関する 2 次方程式となる。

X を求めると、

$$X = \boxed{\text{㉔}} \pm \boxed{\text{㉕}}$$

となる。

したがって、 $x^4 - 72x^2 + 12^2$ を 2 次式の積で表すと、

$$x^4 - 72x^2 + 12^2 = (x^2 - \boxed{\text{㉔}} - \boxed{\text{㉕}})(x^2 - \boxed{\text{㉔}} + \boxed{\text{㉕}}) \cdots \cdots \text{㉗}$$

となる。

(2) (1) とは別の方法で $x^4 - 72x^2 + 12^2$ を 2 次式の積で表すことを考える。

$$x^4 - 72x^2 + 12^2 = (x^2 - 12)^2 - \boxed{\text{㉘}}x^2$$

$$= (x^2 + \boxed{\text{㉙}}x - \boxed{\text{㉚}})(x^2 - \boxed{\text{㉙}}x - \boxed{\text{㉚}}) \cdots \cdots \text{㉘}$$

また、

$$x^4 - 72x^2 + 12^2 = (x^2 + 12)^2 - \boxed{\text{㉛}}x^2$$

$$= (x^2 + \boxed{\text{㉜}}x + \boxed{\text{㉝}})(x^2 - \boxed{\text{㉜}}x + \boxed{\text{㉝}}) \cdots \cdots \text{㉙}$$

と変形することもできる。

(3) (1)(2) より, 4 次式 $x^4 - 72x^2 + 12^2$ を 2 次式の積で表すと ㉠ ㉢ ㉣ の 3 通りで表すことができた。4 次方程式 $x^4 - 72x^2 + 12^2 = 0$ の解は 4 つあり, ㉠ ㉢ ㉣ のどの式から解を求めても同じ解が得られる。

例えば, (1) の結果を使うと,

$$x^2 = \boxed{\text{㉡}} \pm \boxed{\text{㉣}} \text{ だから,}$$

$$x = \pm \sqrt{\boxed{\text{㉡}} \pm \boxed{\text{㉣}}} \text{ となる。ただし, } \pm \text{ の選び方により } x \text{ の値は 4 個となる。}$$

ここで 2 重根号をはずすと,

$$\sqrt{\boxed{\text{㉡}} - \boxed{\text{㉣}}} = \boxed{\text{㉤}} - \boxed{\text{㉥}}$$

$$\sqrt{\boxed{\text{㉡}} + \boxed{\text{㉣}}} = \boxed{\text{㉤}} + \boxed{\text{㉥}}$$

となるから, 方程式 $x^4 - 72x^2 + 12^2 = 0$ の解は

$$x = \pm (\boxed{\text{㉤}} \pm \boxed{\text{㉥}})$$

となる。ただし, $\pm$ の選び方により x の値は 4 個ある。

[選択肢]

㉠ 12

㉡ 36

㉢ 48

㉣ 96

㉤ $2\sqrt{3}$

㉥ $4\sqrt{3}$

㉦ $24\sqrt{2}$

㉧ $2\sqrt{6}$

㉨ $4\sqrt{6}$

㉩ $24\sqrt{6}$

Ⅳ 直美さんと優奈さんと春香さんが、じゃんけんについて話している。3人の会話を読みながら、次の $\boxed{57}$ ～ $\boxed{74}$ の中に適切な数字を入れなさい。

春香 : じゃんけんって、数学の問題ではグー・チョキ・パーを同じ割合で出すという設定が多いけど、違う割合で出す人たちが勝負したらどうなるのかなあ。

直美 : おもしろそうだね。なにか設定を作って確率的にどうなるか考えてみよう。

優奈 : じゃあ、私が設定を考えてみるよ。

3人をA, B, Cとする。じゃんけんで、Aはグー、チョキ、パーをそれぞれ4回に2回、1回、1回となるような割合でランダムに出すものとする。Bはグー、チョキ、パーをそれぞれ4回に1回、2回、1回となるような割合でランダムに出すものとする。Cはグー、チョキ、パーをそれぞれ6回に1回、2回、3回となるような割合でランダムに出すものとする。

春香 : その設定をおおまかにみると、Aはグーをよく出し、Bはチョキをよく出し、Cはパーをよく出すから、AとBがじゃんけんをするとAがよく勝ち、BとCがじゃんけんをするとBがよく勝ち、CとAがじゃんけんをするとCがよく勝ちそうだね。

A, B, Cの3人がじゃんけんをすると誰がよく勝つのかな。勝敗が1回のじゃんけんで決まるのは、勝つ人が1人だけのときと、2人のときがあるよね。そのうち、勝つ人が1人だけのときを考えてみよう。

(1) 3人でじゃんけんを1回行うとき、Aだけが勝つ確率は、 $\frac{\boxed{57}}{\boxed{58}}$ である。Bだけが勝つ

確率は、 $\frac{5}{48}$ である。Cだけが勝つ確率は、 $\frac{\boxed{59}}{\boxed{60 \ 61}}$ である。

直美 : 計算の結果、A, B, Cの3人がじゃんけんをすると1回のじゃんけんで1人だけが勝つ場合は、Aが一番勝つ確率が高いとわかったよ。

優奈 : じゃあ、2人が勝つ場合はどうなるのだろう。

春香 : 1回のじゃんけんで2人が勝つ場合の確率を求めてみよう。

- (2) 3人でじゃんけんを1回行うとき、AとBが勝つ確率は、 $\frac{11}{96}$ である。AとCが勝つ確率は、 $\frac{\boxed{62}}{\boxed{63\ 64}}$ である。BとCが勝つ確率は、 $\frac{11}{96}$ である。

直美 : 計算の結果、3人がじゃんけんをすると1回のじゃんけんで2人が勝つ場合には、勝った2人にBが含まれている確率が高いんだね。

優奈 : そっか。結局だれが一番勝つ確率が高いんだろう。それぞれの確率を求めてみない？

春香 : 3人でじゃんけんを1回行うとき、例えば、Aが勝つ場合というのは、Aが1人で勝つ場合と、AとB、AとCが勝つ場合を考えれば求められそうだね。

- (3) 3人でじゃんけんを1回行うとき、Aが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ となり、Bが勝つ確率も $\frac{1}{3}$ となる。Cが勝つ確率は、 $\frac{\boxed{65}}{\boxed{66\ 67}}$ である。

直美 : 計算の結果、3人がじゃんけんをすると、AとBが同じ確率で勝つ確率が高くて、Cだけが低くなるのか。AとBが同じというのが面白いね。

優奈 : ところで、Aが勝ったとき、グー、チョキ、パーのどれを出していることが多いのだろう。

春香 : もともと、Aがグー、チョキ、パーを出す確率は、それぞれ $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$ だから、そうになっているんじゃないの？

直美 : いや。そうとはかぎらないんじゃないの。Aが勝ったときAがパーを出していた確率を求めてみよう。

- (4) Aが勝ったときAがパーを出していた確率は、 $\frac{\boxed{68}}{\boxed{69\ 70}}$ である。

直美 : もともとAがパーを出す確率は $\frac{1}{4}$ だけど、その確率より低い値が出たね。この結果から考えると、Aはパーを出す勝ちにくい感じがするね。
ランダムなじゃんけんだと結果の確率が予想しにくいね。

優奈 : じゃんけんって、はたから見ていると、「あいこでしょ。あいこでしょ。」という掛け声で何回も繰り返すこともあるよね。3人でじゃんけんを1回行うとき、あいこ

になる確率はどうなるのかなあ。

直美 : あいこになるというのは、3 人が出した手の種類が、グー・グー・グーなどのように 1 種類になるときと、グー・チョキ・パーなどのように 3 種類になるときがあるから場合分けがたいへんそうだね。

春香 : 1 回のじゃんけんでは、1 人だけが勝つ、2 人が勝つ、あいこになるの 3 タイプしかないと考えれば、場合分けなんかしなくても、いままで考えてきたことから求められるよ。

(5) 3 人でじゃんけんを 1 回行うとき、あいこになる確率は、 $\frac{\boxed{\textcircled{71}}\boxed{\textcircled{72}}}{\boxed{\textcircled{73}}\boxed{\textcircled{74}}}$ である。